

CINEMATIQUE - Chapitre 2 : La Cinématique du point

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux deux grandeurs cinématiques fondamentales que sont la **vitesse** et l'**accélération**. Le calcul de la vitesse trouve son utilité par exemple dans l'établissement de la loi entrée/sortie cinématique du mécanisme. L'accélération est une notion qui intervient dans l'écriture du principe fondamental de la dynamique afin d'établir le lien entre le mouvement d'un système et les efforts qu'il subit.

1) Dérivation vectorielle

La **dérivée temporelle d'un vecteur variable dans le temps** n'est pas aussi directe que celle d'une quantité scalaire.

a. Définition

On considère un vecteur $\vec{U}(t)$ de direction et de norme variables dans le temps par rapport à un repère orthonormé de référence $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Alors la dérivée temporelle du vecteur $\vec{U}(t)$ dans le repère R s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right)_R$$

Le vecteur $\left(\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right)_R$ caractérise la tendance, à l'instant t , que le vecteur $\vec{U}(t)$ a de varier par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. de ce fait, il est impératif de ne pas oublier d'indiquer en bas à droite le repère dans lequel se calcule la dérivée (c'est à dire le repère par rapport auquel on observe les variations du vecteur que l'on dérive).

b. Expression analytique

Si le vecteur $\vec{U}(t)$ est connu par ses composantes dans la base $B(x, y, z)$ du repère R :

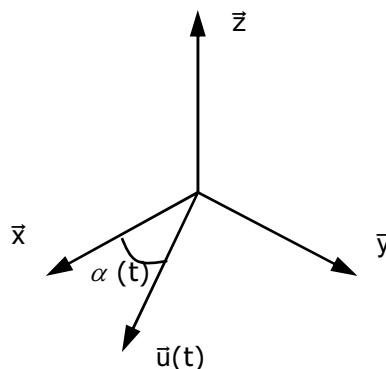
$$\vec{U}(t) = U_x(t)\vec{x} + U_y(t)\vec{y} + U_z(t)\vec{z}$$

Alors :

$$\left(\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right)_R = \dot{U}_x(t)\vec{x} + \dot{U}_y(t)\vec{y} + \dot{U}_z(t)\vec{z}$$

c. Cas particulier simple

On considère un repère orthonormé $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et un **vecteur unitaire** \vec{u} , de direction variable dans le plan $(O\vec{x}\vec{y})$:



On peut alors écrire que :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}(R_u/R) \wedge \vec{u}$$

avec $\vec{\Omega}(R_u/R) = \dot{\alpha}(t)\vec{z}$

La connaissance du vecteur $\vec{\Omega}(R_u/R)$ – c'est à dire ici de celle de $\dot{\alpha}(t)$ – permet donc de calculer simplement $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R$.

$\vec{\Omega}(R_u/R)$ est appelé **vecteur vitesse instantanée de rotation** avec laquelle le repère R_u tourne autour du repère R .

$\|\vec{\Omega}(R_u/R)\|$ est homogène à des rad/s. Sa direction caractérise l'axe autour duquel se fait la rotation de R_u par rapport à R (dans notre cas \vec{z}).

d. Cas général

On considère maintenant un vecteur $\vec{U}(t)$ de norme et de direction variables par rapport à 2 repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $R'(O', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$.

On écrit alors :

$$\left(\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{U}(t)$$

Cette relation est connue sous le nom de **formule de dérivation vectorielle**.

Lorsque le calcul de la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{U}(t)$ dans un repère R est délicat, on procède comme suit :

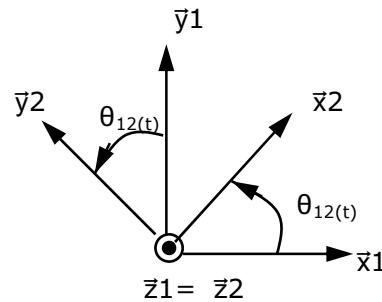
- ❑ Choisir un repère R' dans lequel la dérivée temporelle de $\vec{U}(t)$ est plus simple à calculer (et même, si possible nulle),
- ❑ Calculer $\left(\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right)_{R'}$
- ❑ Déterminer $\vec{\Omega}(R'/R)$
- ❑ Calculer $\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{U}(t)$
- ❑ Sommer les 2 nombres précédents pour obtenir $\left(\frac{d\vec{U}(t)}{dt}\right)_R$

2) Vecteur vitesse instantanée de rotation

a. Définition

Soient $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ 2 repères tels que :

$$\theta_{12} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \text{ et } \vec{z}_1 = \vec{z}_2$$



On appelle vecteur vitesse instantanée de rotation de R2 par rapport à R1 le vecteur $\vec{\Omega} (R_2/R_1)$ défini par :

$$\vec{\Omega} (R_2/R_1) = \dot{\theta}_{12} \vec{z}_1 = \dot{\theta}_{12} \vec{z}_2$$

b. Interprétation physique

$\vec{\Omega} (R_2/R_1)$, vecteur vitesse instantanée de rotation de R2 par rapport à R1 quantifie :

- ❑ par sa direction, la direction de l'axe autour duquel R2 tourne autour de R1,
- ❑ par sa norme, la vitesse angulaire avec laquelle se fait cette rotation : plus la norme est grande, plus le repère R2 tourne vite par rapport au repère R1.
- ❑ par son sens, le sens dans lequel se fait cette rotation.

c. Remarques

Remarque 1 : le sens des flèches du paramètre angulaire θ_{12} n'est absolument pas significatif du sens de rotation de 2 par rapport à 1.

Remarque 2 : si 2 repères n'ont pas la même origine mais ont en commun l'un des vecteurs de leurs bases respectives, le paramétrage angulaire et le vecteur vitesse instantanée de rotation sont les mêmes que si les origines des 2 repères étaient confondues.

d. Composition des vecteurs vitesse instantanée de rotation

On considère un solide S2, auquel est associé le repère R2, en mouvement par rapport au repère R1, lui-même en mouvement par rapport au repère R0. Les mouvements relatifs des 3 repères R0, R1 et R2 induisent l'existence des 3 vecteurs vitesse instantanée de rotation : $\vec{\Omega} (R_1/R_0)$, $\vec{\Omega} (R_2/R_1)$ et $\vec{\Omega} (R_2/R_0)$.

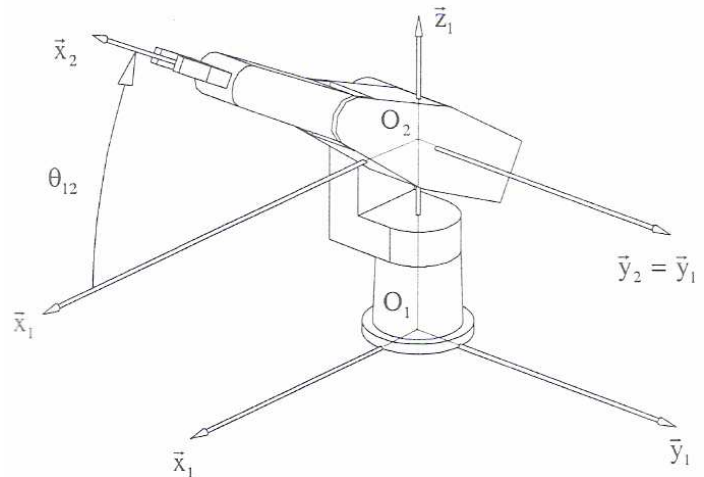
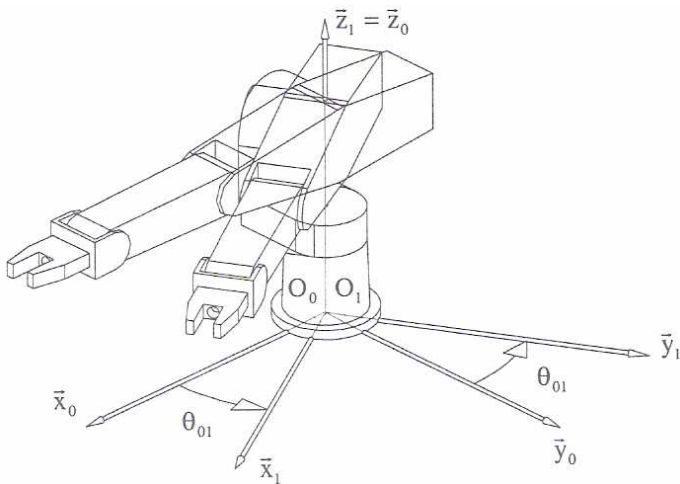
On écrit alors :

$$\vec{\Omega} (R_2/R_0) = \vec{\Omega} (R_2/R_1) + \vec{\Omega} (R_1/R_0)$$

e. Application

Dans l'exemple du robot ERICC3, on considère les 3 repères :

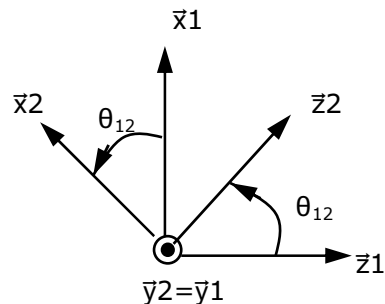
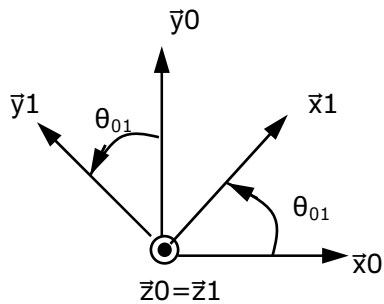
- ❑ R0(O0, $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$),
- ❑ R1(O1, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) tel que O1=O0, $\vec{z}_0=\vec{z}_1$ et $\theta_{01} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$,
- ❑ R2(O2, $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$) tel que O1O2 = $L_{12}\vec{z}_1$, $\vec{y}_2=\vec{y}_1$ et $\theta_{12} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$.



On peut définir les vecteurs vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega} (R_1/R_0)$ et $\vec{\Omega} (R_2/R_1)$.

$$\vec{\Omega} (R_1/R_0) = \dot{\theta}_{01} \vec{z}_0 = \dot{\theta}_{01} \vec{z}_1$$

$$\vec{\Omega} (R_2/R_1) = \dot{\theta}_{12} \vec{y}_1 = \dot{\theta}_{12} \vec{y}_2$$

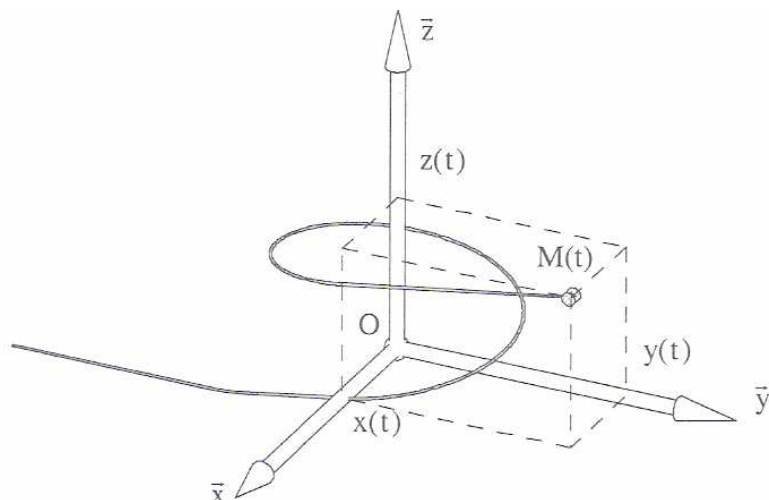


On en déduit : $\vec{\Omega} (R_2/R_0) = \vec{\Omega} (R_2/R_1) + \vec{\Omega} (R_1/R_0)$

Soit : $\vec{\Omega} (R_2/R_0) = \dot{\theta}_{01} \vec{z}_1 + \dot{\theta}_{12} \vec{y}_1 = \dot{\theta}_{01} \vec{z}_0 + \dot{\theta}_{12} \vec{y}_2$

3) Vitesse d'un point par rapport à un repère

On considère un point M de position variable dans le temps par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Le vecteur position de ce point est le vecteur $\vec{OM}(t)$, de composantes $(x(t), y(t), z(t))$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



a. Définition

On appelle **vecteur vitesse du point M par rapport au repère R** le vecteur :

$$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R$$

b. Expression analytique du vecteur vitesse

Expression cartésienne du vecteur vitesse : le calcul du vecteur vitesse peut se faire à partir de la donnée du vecteur position en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{OM}(t) = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}$$

D'où

$$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) \vec{x} + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right) \vec{y} + \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) \vec{z}$$

Soit :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z}$$

Physiquement, tout se passe comme si $\vec{V}(M/R)$ était la somme des vecteurs vitesse obtenus dans les 3 cas suivants :

- $x(t)$ varie, y et z sont constants : vitesse $\dot{x}\vec{x}$
- $y(t)$ varie, x et z sont constants : vitesse $\dot{y}\vec{y}$
- $z(t)$ varie, x et y sont constants : vitesse $\dot{z}\vec{z}$

Chacun des vecteurs a une norme homogène à des m/s.

Expression cylindrique du vecteur vitesse : l'expression cylindrique du vecteur position est :

$$\vec{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{z}$$

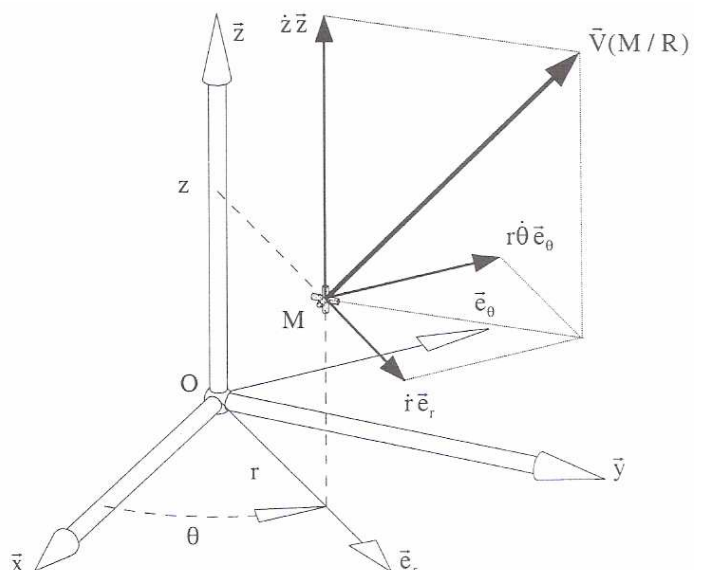
On appelle R' le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z})$. d'après la formule de dérivation vectorielle, on a :

$$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM}$$

$$\text{Or : } \vec{\Omega}(R'/R) = \dot{\theta} \vec{z}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM} &= \dot{\theta} \vec{z} \wedge (r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{z}) \\ &= r\dot{\theta} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$



Et :

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{dr(t)}{dt}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)\vec{z}$$

On obtient :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{z}$$

4) Accélération d'un point par rapport à un repère

On considère un repère $R(O, x, y, z)$ et un point M de position variable par rapport à R .

Le vecteur position de ce point par rapport au repère R est le vecteur $\vec{OM}(t)$ et son vecteur vitesse par rapport au repère R est le vecteur $\vec{V}(M/R)$.

a. Définition

On appelle vecteur accélération du point M par rapport au repère R , le vecteur :

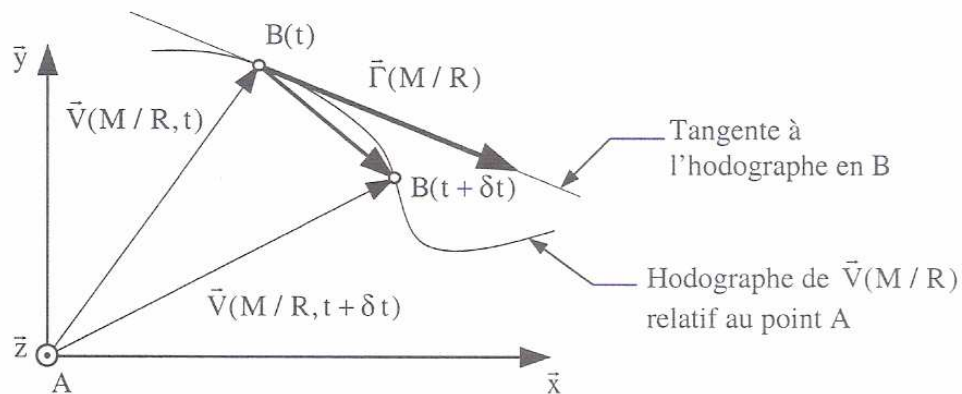
$$\vec{\Gamma}(M/R) = \left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right)_R$$

b. Interprétation géométrique

Soit A un point quelconque de l'espace, fixe par rapport au repère R et B , un point mobile tel que :

$$\vec{AB}(t) = \vec{V}(M/R)$$

Alors lorsque le point M se déplace, il est possible de construire une courbe à partir des positions successives de B . Cette courbe s'appelle **l'hodographe du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ relatif au point A** .



D'après la définition des vecteurs $\vec{\Gamma}(M/R)$ et \vec{AB} , on a :

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_R$$

Par suite et par analogie avec l'interprétation géométrique du vecteur vitesse, **le vecteur accélération est un vecteur de même direction et de même sens que la tangente en B à l'hodographe du vecteur $\vec{V}(M/R)$ relatif au point A .**

c. Expressions analytiques du vecteur accélération

Expression cartésienne du vecteur accélération : on rappelle l'expression cartésienne du vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z}$$

D'où, en appliquant la définition du vecteur accélération :

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\dot{x}}{dt} \right)\vec{x} + \left(\frac{d\dot{y}}{dt} \right)\vec{y} + \left(\frac{d\dot{z}}{dt} \right)\vec{z}$$

Soit :

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{x} + \ddot{y}\vec{y} + \ddot{z}\vec{z}$$

Chaque composante du vecteur est homogène à des m/s².

Expression cylindrique du vecteur accélération : l'expression cylindrique du vecteur vitesse est :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{z}$$

En considérant le repère R' (O, $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{z}$) et après la formule de dérivation vectorielle, on a :

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{V}(M/R)$$

Sachant que :

$$\vec{\Omega}(R'/R) = \dot{\theta}\vec{z}$$

On a :

$$\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{V}(M/R) = \dot{\theta}\vec{z} \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{z}) = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

On obtient :

$$\vec{\Gamma}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{z}$$

5) Application

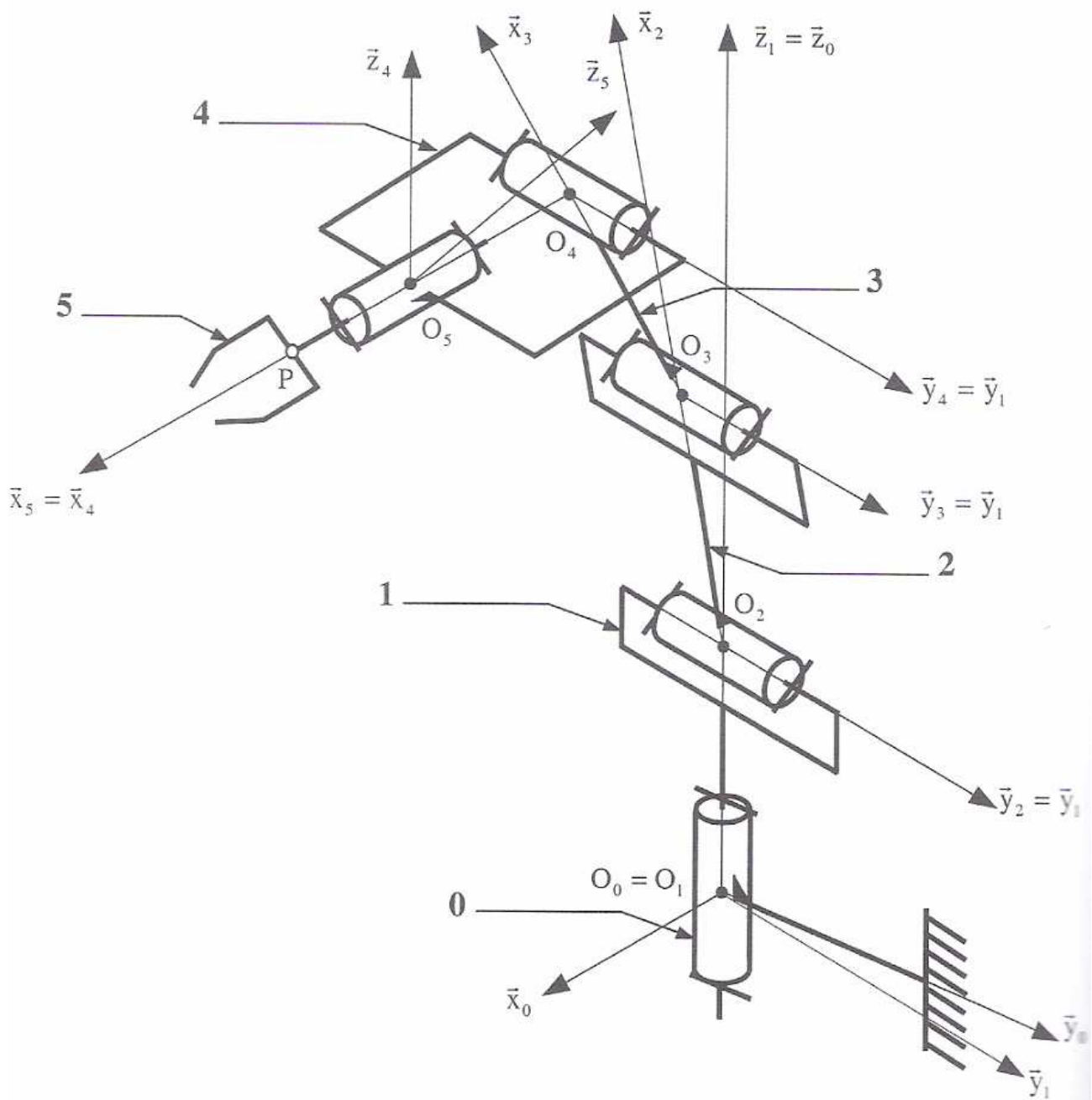
On s'intéresse au point P situé sur l'axe de la pince du robot ERICC 3, point tel que :

$$\overrightarrow{O_5P} = L_P\vec{x}_4$$

On rappelle que :

$$\vec{O_1O_2} = L_{12}\vec{z}_1, \vec{O_2O_3} = L_{23}\vec{x}_2, \vec{O_3O_4} = L_{34}\vec{x}_3 \text{ et } \vec{O_4O_5} = L_{45}\vec{x}_4$$

(Voir schéma cinétique page suivante)



a. Calcul de $\vec{V}(P/R0)$

Par définition :

$$\vec{V}(P/R0) = \left(\frac{d\vec{O_0P}}{dt} \right)_{R0}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \vec{O_0P} &= \vec{O_0O_1} + \vec{O_1O_2} + \vec{O_2O_3} + \vec{O_3O_4} + \vec{O_4O_5} + \vec{O_5P} \\ \vec{O_0P} &= \vec{0} + L_{12}\vec{z}_1 + L_{23}\vec{x}_2 + L_{34}\vec{x}_3 + L_{45}\vec{x}_4 + L_P\vec{x}_4 \end{aligned}$$

D'où

$$\vec{V}(P/R_0) =$$

b. Calcul de $\vec{\Gamma}(O_3/R_0)$

c. Remarque

Le calcul des expressions des vecteurs $\vec{V}(P/R_0)$ et $\vec{\Gamma}(O_3/R_0)$ met en évidence qu'il existe une différence fondamentale entre :

- la base du repère d'observation, repère par rapport auquel on calcule le mouvement et,
- la base d'expression du résultat qui peut être la même base que celle du repère d'observation, une autre base ou un mélange quelconque de plusieurs bases.